

# Exercices — Thème 2

## Exercice 1 : L'identité du parallélogramme

*Mots-clés* : espace pré-hilbertien, norme sup, identité du parallélogramme, contre-exemple

**Question.** Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$  l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur  $[0, 1]$ , muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Montrer que  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas un espace pré-hilbertien.

### Indication

Il faut montrer que la norme ne peut pas découler d'un produit scalaire, et donc trouver un contre-exemple à l'identité du parallélogramme. Essayez avec des fonctions simples.

### Solution

Il suffit de montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  viole l'identité du parallélogramme :

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Posons  $f(t) = 1$  et  $g(t) = t$ . On calcule :

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|g\|_\infty = 1, \quad \|f + g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |1 + t| = 2, \quad \|f - g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |1 - t| = 1.$$

On obtient alors :

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 = 4 + 1 = 5 \neq 4 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2).$$

L'identité du parallélogramme n'est donc pas satisfaite, ce qui implique que  $\|\cdot\|_\infty$  ne peut être induite par aucun produit scalaire. L'espace  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas pré-hilbertien.

## Exercice 2 : L'opérateur de décalage sur $\ell^2(\mathbb{N})$

*Mots-clés* : décalage, shift,  $\ell^2$ , isométrie, opérateur unitaire, dimension infinie

**Question.** On rappelle que  $\ell^2(\mathbb{N})$  désigne l'espace des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes vérifiant  $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ , muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^* y_n$ .

On définit l'opérateur de décalage à droite  $T: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  par :

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

**Question.** Montrer que  $T$  est une isométrie linéaire.

**Solution**

**Linéarité.** Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$  :

$$T(\alpha x + \beta y) = (0, \alpha x_0 + \beta y_0, \alpha x_1 + \beta y_1, \dots) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

**Isométrie.** On vérifie la conservation de la norme :

$$\|T(x)\|^2 = |0|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2.$$

Donc  $T$  est une isométrie, et en particulier  $T$  est injectif (car  $\|T(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ).

**Question.**  $T$  est-il un isomorphisme hilbertien (opérateur unitaire) ?

**Solution**

$T$  n'est pas un isomorphisme hilbertien. Un isomorphisme hilbertien doit être bijectif. Or  $T$  n'est pas surjectif : la suite  $y = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$  n'admet aucun antécédent par  $T$ , car la première composante de tout  $T(x)$  est 0.

Ainsi,  $T$  est une isométrie non unitaire. Cet exemple illustre un phénomène propre à la dimension infinie : en dimension finie, toute isométrie linéaire est automatiquement surjective (argument de dimension), ce qui n'est plus vrai en dimension infinie.

**Exercice 3 : Représentant de Riesz en dimension finie**

*Mots-clés* : Riesz, forme linéaire, produit scalaire, antilinéarité, dimension finie

**Question.** Soit  $E = \mathbb{C}^n$  muni du produit scalaire usuel  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^* y_k$ . Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  la forme linéaire définie par

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n.$$

**Question.** Déterminer le représentant de Riesz  $u_\varphi \in E$  tel que  $\varphi(x) = \langle u_\varphi, x \rangle$  pour tout  $x \in E$ .

**Solution**

On cherche  $u = (u_1, \dots, u_n)$  tel que  $\langle u, x \rangle = \sum_k u_k^* x_k = \sum_k a_k x_k$  pour tout  $x \in E$ . Par identification composante par composante,  $u_k^* = a_k$ , soit

$$u_\varphi = (a_1^*, \dots, a_n^*).$$

**Question.** Montrer que l'application  $\varphi \mapsto u_\varphi$  est antilinéaire.

**Solution**

Soient  $\varphi, \psi$  deux formes linéaires de représentants  $u_\varphi$  et  $u_\psi$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Le représentant de  $\lambda\varphi + \psi$  vérifie, pour tout  $x$  :

$$\langle u_{\lambda\varphi + \psi}, x \rangle = (\lambda\varphi + \psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \psi(x) = \lambda\langle u_\varphi, x \rangle + \langle u_\psi, x \rangle = \langle \lambda^* u_\varphi + u_\psi, x \rangle,$$

donc  $u_{\lambda\varphi + \psi} = \lambda^* u_\varphi + u_\psi$ . L'application  $\varphi \mapsto u_\varphi$  est bien antilinéaire.

### Exercice 4 : Algèbre des opérateurs de création et d'annihilation

*Mots-clés* : oscillateur harmonique, création, annihilation, commutateur, nombre d'occupation, Heisenberg

**Question.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. On suppose donnés deux opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$  sur  $H$  vérifiant la relation de commutation canonique

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}.$$

On définit l'opérateur nombre  $N = a^\dagger a$ .

**Question.** Montrer que  $[N, a] = -a$  et  $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ .

#### Solution

On développe en utilisant  $[a, a^\dagger] = \mathbf{1}$  :

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = 0 - \mathbf{1} \cdot a = -a.$$

De même :

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger \cdot \mathbf{1} + 0 = a^\dagger.$$

**Question.** Soit  $|n\rangle$  un vecteur propre de  $N$  de valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|n\rangle \neq 0$ . Montrer que si  $a|n\rangle \neq 0$ , alors  $a|n\rangle$  est vecteur propre de  $N$  de valeur propre  $\lambda - 1$ , et que si  $a^\dagger|n\rangle \neq 0$ , alors  $a^\dagger|n\rangle$  est vecteur propre de  $N$  de valeur propre  $\lambda + 1$ .

#### Solution

Supposons  $N|n\rangle = \lambda|n\rangle$ . Alors :

$$N(a|n\rangle) = [N, a]|n\rangle + aN|n\rangle = -a|n\rangle + \lambda a|n\rangle = (\lambda - 1)a|n\rangle.$$

Si  $a|n\rangle \neq 0$ , c'est donc un vecteur propre de  $N$  de valeur propre  $\lambda - 1$ . De même :

$$N(a^\dagger|n\rangle) = [N, a^\dagger]|n\rangle + a^\dagger N|n\rangle = a^\dagger|n\rangle + \lambda a^\dagger|n\rangle = (\lambda + 1)a^\dagger|n\rangle,$$

donc  $a^\dagger|n\rangle$ , s'il est non nul, est vecteur propre de valeur propre  $\lambda + 1$ .

**Question.** Montrer que  $\lambda \geq 0$ . En déduire que le spectre de  $N$  est  $\mathbb{N}$  et que les valeurs propres sont des entiers.

#### Solution

Pour tout  $|\psi\rangle \in H$  :

$$\langle \psi | N | \psi \rangle = \langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle = \|a|\psi\rangle\|^2 \geq 0,$$

donc  $N$  est un opérateur positif et toute valeur propre  $\lambda$  vérifie  $\lambda \geq 0$ .

Supposons  $\lambda \notin \mathbb{N}$ . En appliquant  $a$  répétitivement, on obtient la suite de valeurs propres  $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 2, \dots$ , qui finit par être strictement négative, ce qui contredit  $\lambda \geq 0$ . Donc le spectre est contenu dans  $\mathbb{N}$ ; en appliquant  $a^\dagger$  à partir de  $|0\rangle$  (vecteur propre de valeur propre 0, dont l'existence est assurée par l'argument de positivité), on construit tous les entiers.

**Question.** Montrer que

$$\|a|n\rangle\|^2 = n, \quad \|a^\dagger|n\rangle\|^2 = n + 1.$$

En déduire, en choisissant les phases de sorte que les coefficients soient réels positifs :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

### Solution

En utilisant  $[a, a^\dagger] = \mathbf{1}$  et  $N = a^\dagger a$  :

$$\|a|n\rangle\|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n.$$

Pour  $a^\dagger$  :

$$\|a^\dagger|n\rangle\|^2 = \langle n|a a^\dagger|n\rangle = \langle n|(a^\dagger a + \mathbf{1})|n\rangle = n + 1.$$

Puisque  $a|n\rangle$  est proportionnel à  $|n-1\rangle$  (vecteur propre de valeur propre  $n-1$ , unique à une phase près dans une représentation irréductible), on peut choisir la phase pour écrire :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

### Exercice 5 : Adjoint et projecteurs

*Mots-clés* : adjoint, matrice hermitienne conjuguée, projecteur orthogonal, idempotent

**Question.** Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe (antilineaire à gauche). Rappelons que l'adjoint  $A^\dagger$  d'un opérateur  $A$  est défini par :

$$\langle u, A^\dagger v \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H.$$

**Question.** Montrer que si  $A$  est représenté par une matrice  $(A_{ij})$  dans une base orthonormée, alors  $(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$ .

### Solution

Soient  $|e_i\rangle$  une base orthonormée,  $A_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle$ . Par définition de l'adjoint :

$$(A^\dagger)_{ij} = \langle e_i, A^\dagger e_j \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle^* = A_{ji}^*.$$

**Question.** Soit  $|\psi\rangle \in H$  un vecteur normalisé. On définit  $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ , c'est-à-dire l'opérateur  $P: |v\rangle \mapsto \langle\psi, v\rangle|\psi\rangle$ . Montrer que  $P$  est autoadjoint ( $P^\dagger = P$ ) et idempotent ( $P^2 = P$ ).

### Solution

**Autoadjonction.** Pour tous  $|u\rangle, |v\rangle \in H$  :

$$\langle u, P^\dagger v \rangle = \langle Pu, v \rangle = \langle \langle\psi, u\rangle\psi, v \rangle = \langle\psi, u\rangle^* \langle\psi, v\rangle = \langle u, \psi \rangle \langle\psi, v\rangle = \langle u, Pv \rangle,$$

donc  $P^\dagger = P$ .

**Idempotence.**

$$P^2|v\rangle = P(\langle\psi, v\rangle|\psi\rangle) = \langle\psi, v\rangle P|\psi\rangle = \langle\psi, v\rangle \langle\psi, \psi\rangle|\psi\rangle = \langle\psi, v\rangle|\psi\rangle = P|v\rangle,$$

où l'on a utilisé  $\langle\psi, \psi\rangle = 1$ .

**Question.** Montrer que  $\mathbf{1} - P$  est également un projecteur orthogonal, et interpréter géométriquement.

**Solution**

Posons  $Q = \mathbf{1} - P$ . Alors  $Q^\dagger = \mathbf{1} - P^\dagger = Q$  et  $Q^2 = \mathbf{1} - 2P + P^2 = \mathbf{1} - P = Q$ .  $Q$  est donc un projecteur orthogonal ; son image est le supplémentaire orthogonal  $(\text{Im } P)^\perp = \{|\psi\rangle\}^\perp$ .

**Exercice 6 : Troncature de l'oscillateur harmonique**

*Mots-clés* : oscillateur harmonique, troncature, algèbre de Heisenberg, commutateur, dimension finie

**Question.** On reprend les notations de l'exercice sur les opérateurs de création et d'annihilation. On note  $H_N$  le sous-espace de dimension  $N$  engendré par  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$ . On définit les opérateurs tronqués  $a_N$  et  $a_N^\dagger$  comme les restrictions de  $a$  et  $a^\dagger$  à  $H_N$ , avec la convention  $a_N|0\rangle = 0$  et  $a_N^\dagger|N-1\rangle = 0$ .

**Question.** Écrire les matrices de  $a_N$  et  $a_N^\dagger$  dans la base  $\{|0\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$  pour  $N = 4$ .

**Solution**

En utilisant  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$  et  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$  (avec annulation aux bords) :

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_4^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Question.** Vérifier que  $a_N^\dagger = (a_N)^\dagger$  au sens hilbertien sur  $H_N$ .

**Solution**

Par le résultat de l'exercice sur l'adjoint et les projecteurs,  $(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$ . Les deux matrices obtenues à la question précédente sont transposées conjuguées l'une de l'autre (les coefficients sont réels), donc  $a_4^\dagger = (a_4)^\dagger$ .

**Question.** Calculer  $[a_N, a_N^\dagger]$  et montrer que ce commutateur n'est plus égal à  $\mathbf{1}_{H_N}$ . Interpréter.

**Solution**

On calcule :

$$[a_4, a_4^\dagger] = a_4 a_4^\dagger - a_4^\dagger a_4.$$

Un calcul matriciel direct donne :

$$a_4 a_4^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_4^\dagger a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$[a_4, a_4^\dagger] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{H_4} - |3\rangle\langle 3|.$$

La relation de commutation canonique  $[a, a^\dagger] = \mathbf{1}$  est violée au niveau du dernier état de base : la troncature brise l'algèbre de Heisenberg, car  $a_N^\dagger |N-1\rangle = 0$  alors que l'espace est « trop petit » pour accueillir  $|N\rangle$ .

### Exercice 7 : Opérateur de rotation de spin et unitarité

*Mots-clés* : spin 1/2, Pauli, rotation, opérateur unitaire, exponentielle d'opérateur

**Question.** On considère l'espace  $H = \mathbb{C}^2$  (spin 1/2) avec la base  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ . Les matrices de Pauli sont :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'opérateur de rotation autour de l'axe  $z$  d'angle  $\theta$  :

$$U(\theta) = e^{-i\theta\sigma_z/2}.$$

**Question.** En utilisant  $\sigma_z^2 = \mathbf{1}$ , montrer que :

$$U(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

#### Solution

On développe l'exponentielle en série entière et on sépare les puissances paires et impaires, en utilisant  $\sigma_z^{2k} = \mathbf{1}$  et  $\sigma_z^{2k+1} = \sigma_z$  :

$$e^{-i\theta\sigma_z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta/2)^{2k}}{(2k)!} \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\theta/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sigma_z = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_z.$$

En substituant  $\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$ , on obtient la matrice diagonale annoncée.

**Question.** Vérifier que  $U(\theta)$  est unitaire :  $U^\dagger(\theta)U(\theta) = \mathbf{1}$ .

#### Solution

$U^\dagger(\theta) = \text{diag}(e^{i\theta/2}, e^{-i\theta/2})$ , donc :

$$U^\dagger(\theta)U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

**Question.** Calculer l'opérateur  $U(\theta)\sigma_x U^\dagger(\theta)$  et interpréter le résultat comme une rotation dans le plan  $(x, y)$ .

#### Solution

On calcule :

$$U(\theta)\sigma_x U^\dagger(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

En décomposant :

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \cos \theta \sigma_x + \sin \theta \sigma_y.$$

C'est bien la rotation de  $\sigma_x$  vers  $\sigma_y$  d'angle  $\theta$  dans le plan  $(x, y)$  de l'espace des observables, conformément à la formule adjointe  $UAU^\dagger$  pour les rotations unitaires.