

Exercices — Thème 2

Exercice 1 : L'identité du parallélogramme

Mots-clés : espace pré-hilbertien, norme sup, identité du parallélogramme, contre-exemple

Question. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur $[0, 1]$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace pré-hilbertien.

Exercice 2 : L'opérateur de décalage sur $\ell^2(\mathbb{N})$

Mots-clés : décalage, shift, ℓ^2 , isométrie, opérateur unitaire, dimension infinie

Question. On rappelle que $\ell^2(\mathbb{N})$ désigne l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^* y_n$.

On définit l'opérateur de décalage à droite $T: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ par :

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Question. Montrer que T est une isométrie linéaire.

Question. T est-il un isomorphisme hilbertien (opérateur unitaire) ?

Exercice 3 : Représentant de Riesz en dimension finie

Mots-clés : Riesz, forme linéaire, produit scalaire, antilinéarité, dimension finie

Question. Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^* y_k$. Soit $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Question. Déterminer le représentant de Riesz $u_\varphi \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle u_\varphi, x \rangle$ pour tout $x \in E$.

Question. Montrer que l'application $\varphi \mapsto u_\varphi$ est antilinéaire.

Exercice 4 : Algèbre des opérateurs de création et d'annihilation

Mots-clés : oscillateur harmonique, création, annihilation, commutateur, nombre d'occupation, Heisenberg

Question. Soit H un espace de Hilbert. On suppose donnés deux opérateurs a et a^\dagger sur H vérifiant la relation de commutation canonique

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1}.$$

On définit l'opérateur nombre $N = a^\dagger a$.

Question. Montrer que $[N, a] = -a$ et $[N, a^\dagger] = a^\dagger$.

Question. Soit $|n\rangle$ un vecteur propre de N de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, $|n\rangle \neq 0$. Montrer que si $a|n\rangle \neq 0$, alors $a|n\rangle$ est vecteur propre de N de valeur propre $\lambda - 1$, et que si $a^\dagger|n\rangle \neq 0$, alors $a^\dagger|n\rangle$ est vecteur propre de N de valeur propre $\lambda + 1$.

Question. Montrer que $\lambda \geq 0$. En déduire que le spectre de N est \mathbb{N} et que les valeurs propres sont des entiers.

Question. Montrer que

$$\|a|n\rangle\|^2 = n, \quad \|a^\dagger|n\rangle\|^2 = n + 1.$$

En déduire, en choisissant les phases de sorte que les coefficients soient réels positifs :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Exercice 5 : Adjoint et projecteurs

Mots-clés : adjoint, matrice hermitienne conjuguée, projecteur orthogonal, idempotent

Question. Soit H un espace de Hilbert complexe (antilinéaire à gauche). Rappelons que l'adjoint A^\dagger d'un opérateur A est défini par :

$$\langle u, A^\dagger v \rangle = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in H.$$

Question. Montrer que si A est représenté par une matrice (A_{ij}) dans une base orthonormée, alors $(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*$.

Question. Soit $|\psi\rangle \in H$ un vecteur normalisé. On définit $P = |\psi\rangle\langle\psi|$, c'est-à-dire l'opérateur $P: |v\rangle \mapsto \langle\psi, v\rangle|\psi\rangle$. Montrer que P est autoadjoint ($P^\dagger = P$) et idempotent ($P^2 = P$).

Question. Montrer que $\mathbf{1} - P$ est également un projecteur orthogonal, et interpréter géométriquement.

Exercice 6 : Troncature de l'oscillateur harmonique

Mots-clés : oscillateur harmonique, troncature, algèbre de Heisenberg, commutateur, dimension finie

Question. On reprend les notations de l'exercice sur les opérateurs de création et d'annihilation. On note H_N le sous-espace de dimension N engendré par $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$. On définit les opérateurs tronqués a_N et a_N^\dagger comme les restrictions de a et a^\dagger à H_N , avec la convention $a_N|0\rangle = 0$ et $a_N^\dagger|N-1\rangle = 0$.

Question. Écrire les matrices de a_N et a_N^\dagger dans la base $\{|0\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$ pour $N = 4$.

Question. Vérifier que $a_N^\dagger = (a_N)^\dagger$ au sens hilbertien sur H_N .

Question. Calculer $[a_N, a_N^\dagger]$ et montrer que ce commutateur n'est plus égal à $\mathbf{1}_{H_N}$. Interpréter.

Exercice 7 : Opérateur de rotation de spin et unitarité

Mots-clés : spin 1/2, Pauli, rotation, opérateur unitaire, exponentielle d'opérateur

Question. On considère l'espace $H = \mathbb{C}^2$ (spin 1/2) avec la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Les matrices de Pauli sont :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'opérateur de rotation autour de l'axe z d'angle θ :

$$U(\theta) = e^{-i\theta\sigma_z/2}.$$

Question. En utilisant $\sigma_z^2 = \mathbf{1}$, montrer que :

$$U(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_z = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Question. Vérifier que $U(\theta)$ est unitaire : $U^\dagger(\theta)U(\theta) = \mathbf{1}$.

Question. Calculer l'opérateur $U(\theta) \sigma_x U^\dagger(\theta)$ et interpréter le résultat comme une rotation dans le plan (x, y) .